

산업수학 문제 해결 사례

원자력 발전소 기중기의 이동 경로 최적화

- 국가수리과학연구소 산업수학혁신센터
- 김민중 (Ph.D.)

- **문제 해결 사례: 원자력 발전소 기중기의 이동 경로 최적화**
- **목적**
 - 수학을 활용한 문제 해결 노하우 공유
 - 문제 해결 방법론 강연
- **키워드**
 - 수학적 최적화, 선형계획법, 정수 선형계획법, 외판원 문제
 - 원자력 발전소, 계획예방정비
 - 구글 Or-tools(컴퓨터 계산 도구)

- **최적화**: 의사 결정하는 상황에서 최소의 비용으로 효율을 극대화할 수 있는 방법 탐색
- 최적화 이론은 생산, 물류, 의료, 엔지니어링 등 다양한 분야에서 폭넓게 활용되어 생산성을 높이고 비용 절감과 리스크 감소에 기여
- 기업은 복잡한 최적화 문제를 빠르고 쉽게 해결하기 위해 고성능 컴퓨터를 사용하고 더 효율적인 방법을 개발하는데 노력

- 예시: 공부 시간 배분
 - 2주 뒤 중간고사
 - 시험 준비할 수 있는 시간은 한정되어 있음
 - 공부할 과목과 내용을 많지만 시간이 부족
 - 적은 시간 투자로 점수를 최대한 올릴 수 있는 과목과 범위를 선택하는 문제

- 조건: 제한된 공부시간
- 목적: 평균 점수를 높이기

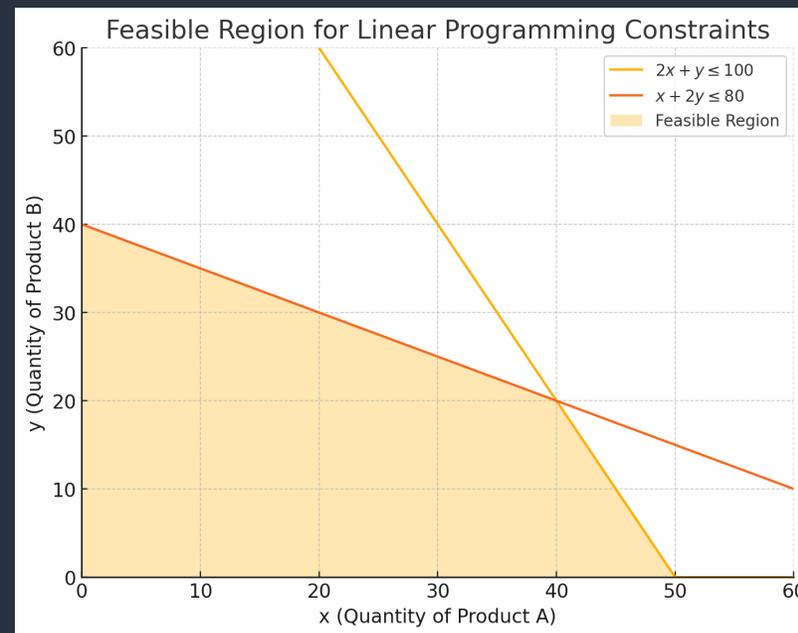
- **수학적 최적화(Mathematical Optimization)**: 최적화 문제를 수학적으로 구체화한 것으로 주어진 **제약 조건** 하에서 **목적 함수**의 값이 최대 또는 최소가 되는 **결정 변수**의 값을 찾는 문제
 - **목적 함수**: 최적화 대상을 수학적으로 표현한 함수. 이익을 최대화 하거나 비용이나 시간을 최소화하는 것을 목표로 함
 - **결정 변수**: 목적 함수에 영향을 미치는 변수로 의사 결정할 때 통제 가능한 변수
 - **제약 조건**: 결정 변수가 만족해야 하는 조건

- 예시: 공장 생산 계획
- 한 공장에서 두 가지 제품 A와 B를 생산
- 조건
 - 제품 A를 생산하는데 기계 작업 2시간과 인력 작업 1시간이 필요
 - 제품 B를 생산하는데 기계 작업 1시간과 인력 작업 2시간이 필요
 - 공장은 최대 기계 작업 시간 100시간, 인력 작업 시간 80시간을 사용할 수 있음
 - 제품 A의 이익은 40, 제품 B의 이익은 30일 때
- 이익을 최대로 하는 A, B 제품의 생산량은?

- 변수 설정
 - x : 제품 A의 생산량
 - y : 제품 B의 생산량
- 목적 함수
 - 이익을 최대화 하는 것이 목표이므로
Maximize $40x + 30y$

- 제약 조건

- 기계 작업 시간: $2x + y \leq 100$
- 인력 작업 시간: $x + 2y \leq 80$
- 작업 시간이 음수가 될 수 없음: $x \geq 0, y \geq 0$



- **수학적 최적화(Mathematical Optimization)**: 목적 함수(Objective Function)를 최대화(또는 최소화)하면서 주어진 제약 조건(Constraints)을 만족하는 해를 찾는 문제

- 수학적 최적화 문제 분류

1. 선형 최적화(Linear Programming, LP)

- 정의: 목적 함수와 제약 조건이 모두 1차식(선형식)인 경우
- 예시:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } 40x + 30y \\ & 2x + y \leq 100, \quad x + 2y \leq 80, \quad x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

2. 비선형 최적화(Nonlinear Programming, NLP)

- 정의: 목적 함수나 제약 조건 중 하나 이상이 비선형인 경우
- 예시:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & 2x + y \\ & x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned}$$

3. 정수 선형 최적화(Integer Linear Programming, ILP)

- 정의: 선형 최적화 문제이지만 해가 정수인 경우
- 예시: 최적의 생산 수량, 인원 배치 등

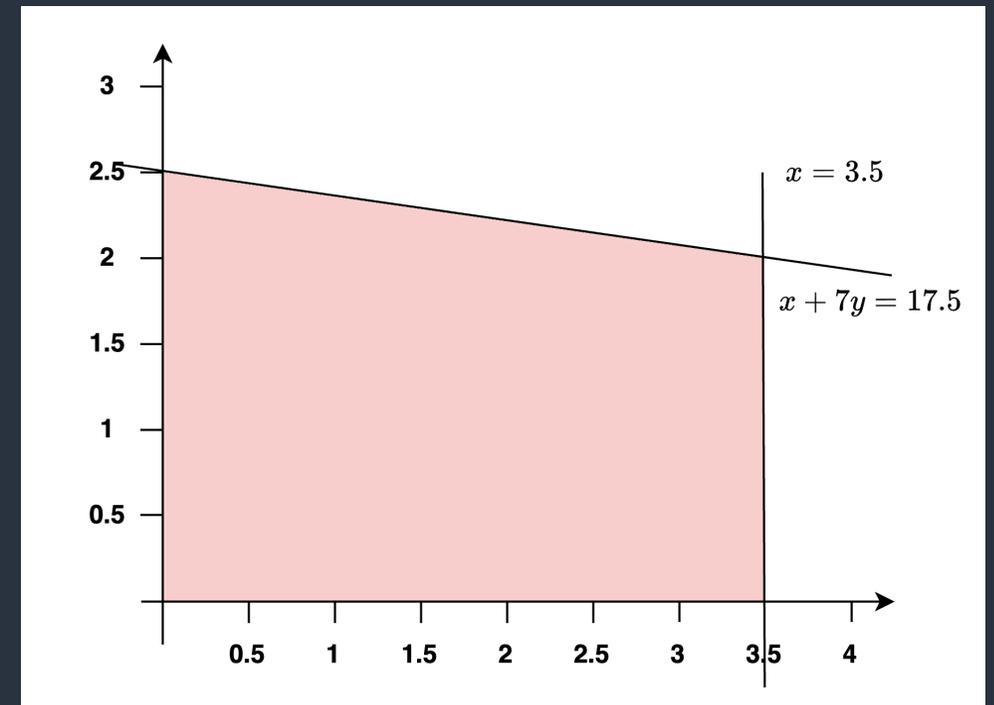
$$\text{Maximize } 40x + 30y$$

$$2x + y \leq 100, \quad x + 2y \leq 80, \quad x, y \in \mathbb{Z}^+$$

4. 조합 최적화(Combinatorial Optimization)

- 정의: 유한한 이산적인 해의 집합에서 최적 해를 찾는 문제
- 예시
 - 외판원 문제(Travelling Salesman Problem)
 - 배낭 문제(Knapsack Problem)

- 선형 최적화(Linear Programming, LP) 예시
- 조건
 - $x + 7y \leq 17.5$
 - $0 \leq x \leq 3.5$
 - $0 \leq y$
- 목적함수: Maximize $x + 10y$



- 선형 최적화(Linear Programming, LP) 예시

- 조건

- $x + 7y \leq 17.5$

- $0 \leq x \leq 3.5$

- $0 \leq y$

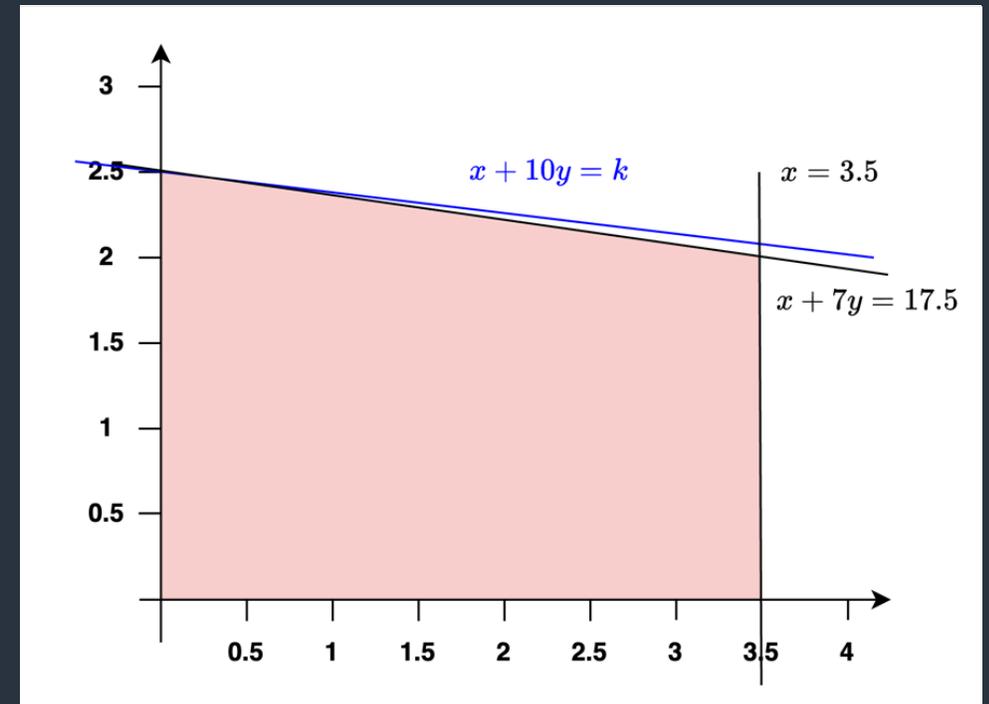
- 목적함수: Maximize $x + 10y$

- 풀이

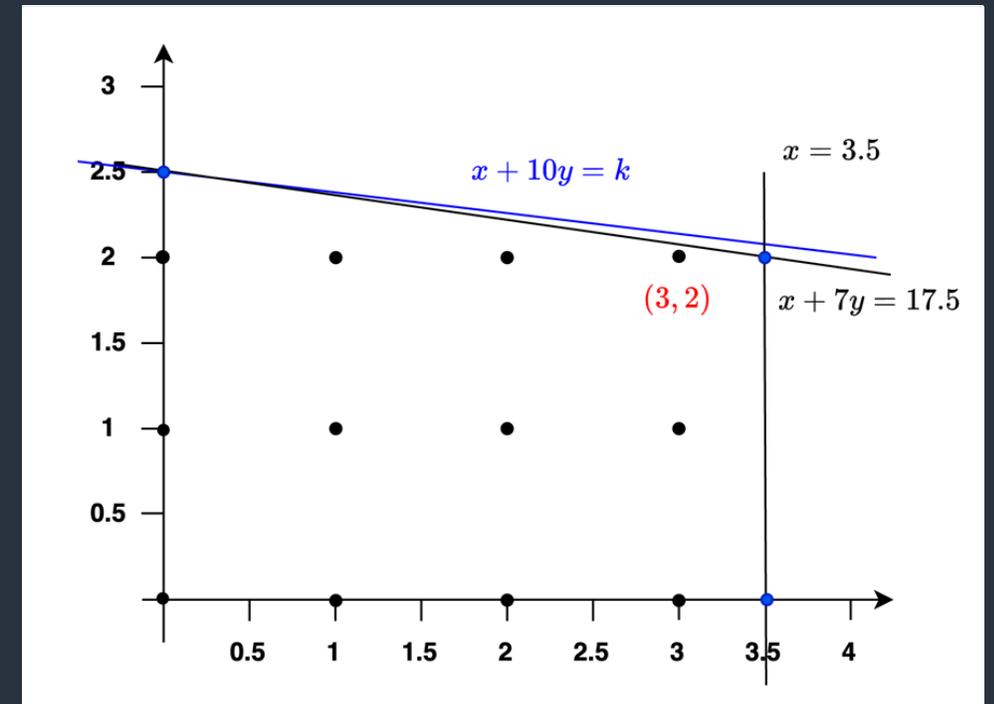
- $x + 10y = k$ 라고 하자.

$y = -\frac{1}{10}x + \frac{k}{10}$ 는 기울기가 $-\frac{1}{10}$

이고 y 절편이 $\frac{k}{10}$ 인 직선이다. 이
직선이 $(0, 2.5)$ 를 지날 때 k 가 최대



- 정수 선형 최적화(Integer Linear Programming, ILP) 예시
- 조건
 - $x + 7y \leq 17.5$
 - $0 \leq x \leq 3.5$
 - $0 \leq y$
 - x, y 는 정수
- 목적함수: Maximize $x + 10y$
- 풀이: ?



- 정수 선형계획법의 풀이 예시
- 완전 탐색: 가능한 모든 정수 해를 대입해 최적해를 찾는 방법으로, 해가 적을 때만 실용적
- 절단평면법: 선형계획법으로 실수해를 구한 뒤 정수해로 제한하는 방법으로 선형계획법 최적해에서 정수조건을 만족하지 않는 해를 제거하는 절단(컷)을 추가하여 정수해로 수렴시키는 기법

- 컴퓨터 계산 도구를 활용한 최적화 문제 해결

- [Google Or-tools](#)



- [예시](#)

- [선형계획법](#)

- [정수 선형계획법](#)

- 의뢰 기업: 한국수력원자력 고리원자력 발전소



- 산업 문제: 원자력 발전소 기중기의 이동 경로 최적화(최소화)

- 한수원의 '20년' 숙원 . . . 원자력에 數를 놓다



HelloDD.com

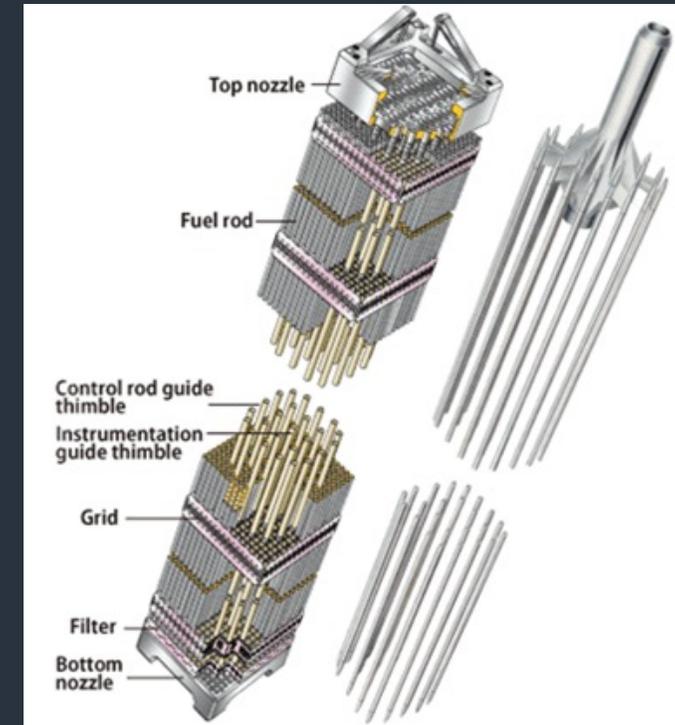
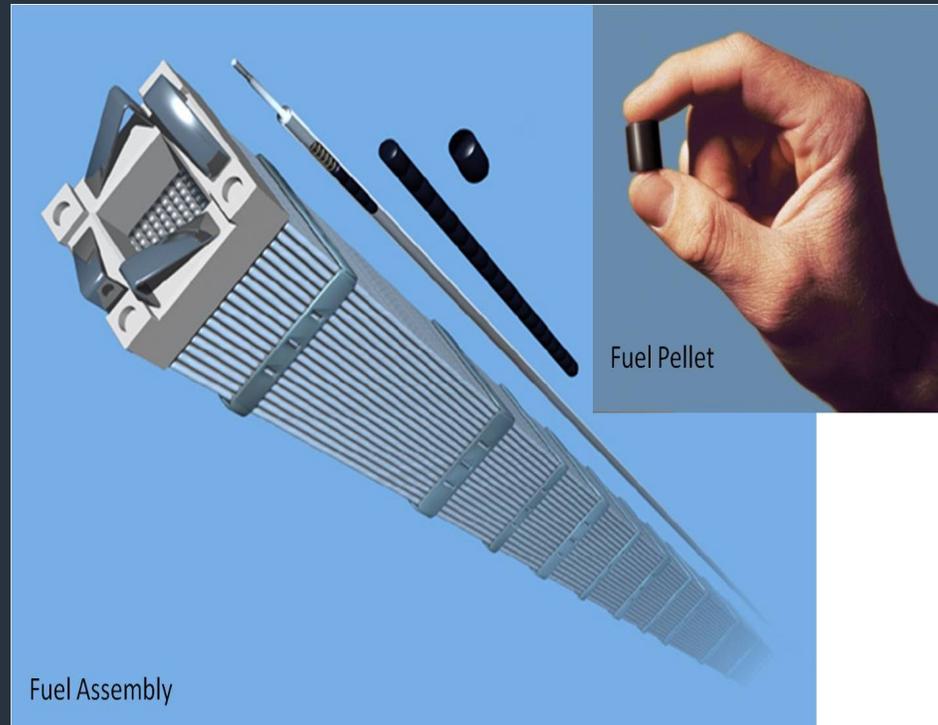
HOME > 뉴스 > R&D-제품

한수원의 '20년' 숙원...원자력에 數를 놓다

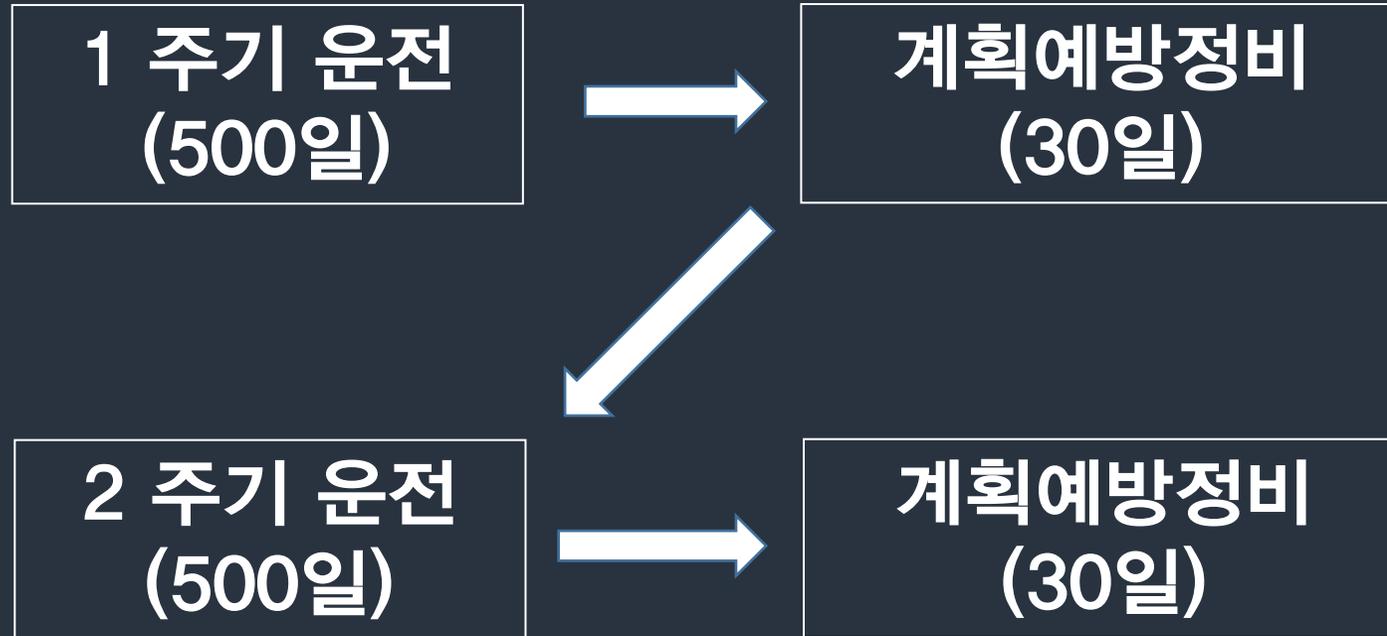
강민구 기자 | 승인 2017.05.23 14:26

수학연 산업수학혁신센터-한수원 고리1발전소 협력..."핵연료취급공정 개선으로 수천 만원 절감"
핵연료 삽입체 위치 변경 등 통해 예산절감 가시화

- 배경: 원자력 발전소의 핵연료와 제어봉



- 핵연료
 - 핵분열을 통해 에너지를 생산하는 연료로 사용하는 물질
 - 원료로 우라늄을 사용
 - 우라늄이 중성자를 흡수하여 핵분열 반응을 일으키고 에너지를 생산
- 제어봉
 - 핵연료에 설치되어 핵분열 반응을 조절하고 제어하는 부품
 - 원자로 장전 모형에 맞게 정해진 특정 연료에만 설치
 - 제어봉은 원자로 및 저장조에서는 핵연료에 장착되어 있음



계획예방정비

한 주기 동안 원자로를 운전한 후, 연료를 교체하고 설비를 점검하여 다음 한 주기를 잘 운전할 수 있도록 정비하는 기간

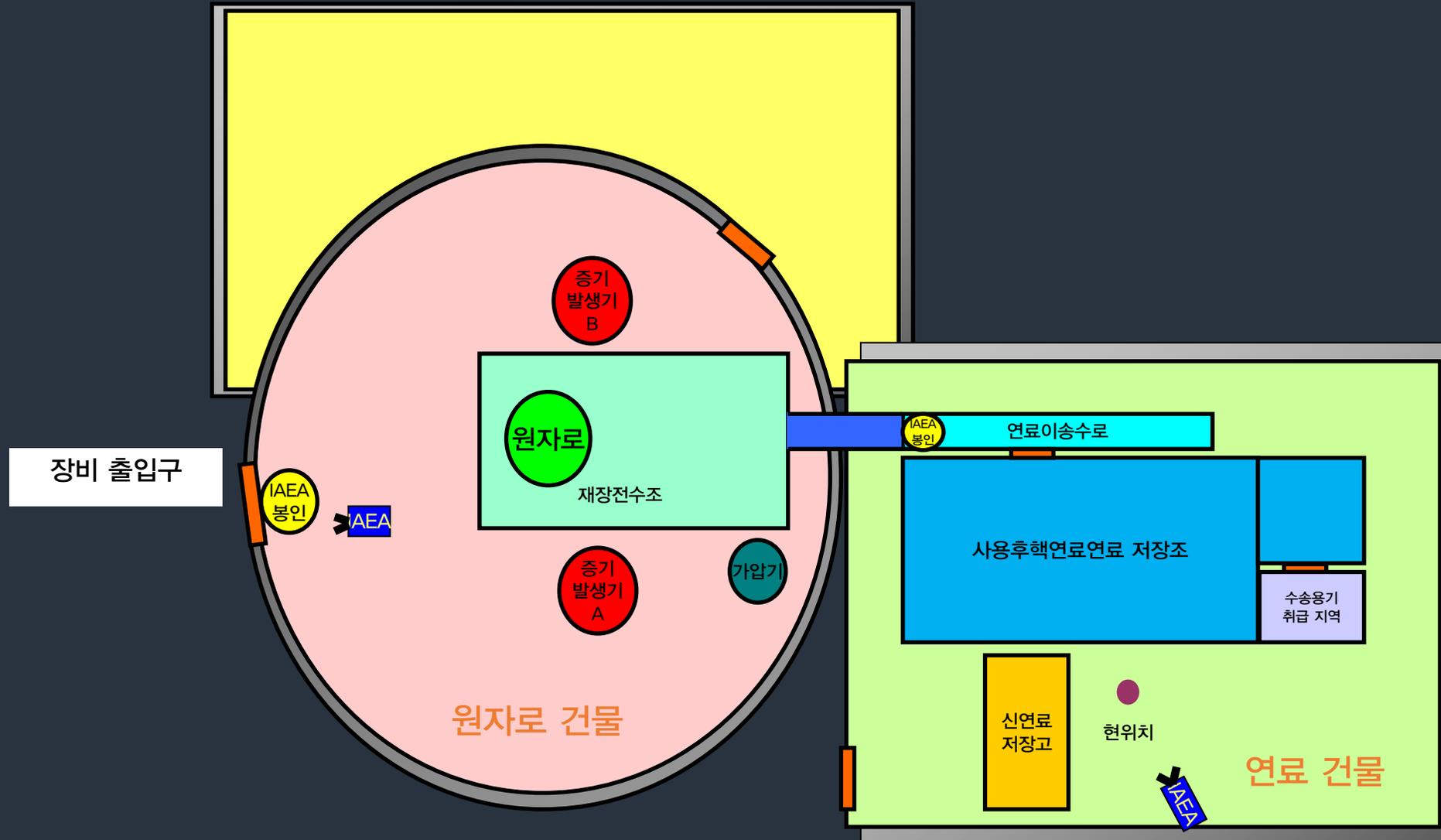


원자로



사용후핵연료 저장조

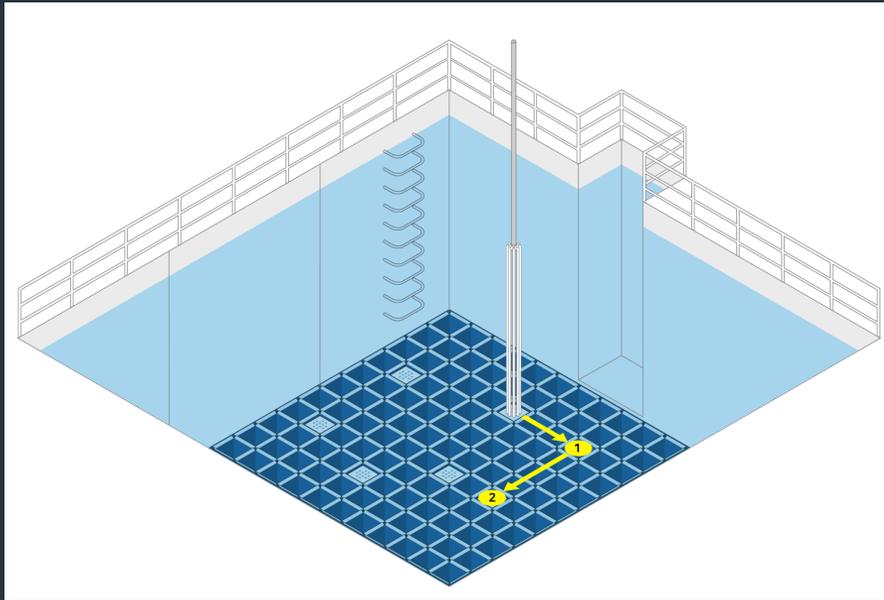
2. 원자력 발전소 산업문제



- 계획예방정비
 - 약 1개월의 정비 기간으로 핵연료를 교체하고 발전소를 정비
 - 안전한 전기 생산을 위해 설비와 주요 부품을 점검하고 교체
 - 이 기간 사용한 핵연료와 제어봉을 사용후핵연료 저장조로 이동
- 사용후핵연료 저장조
 - 바둑판형 구조의 셀
 - 핵연료와 제어봉 저장 (폐기용, 사용 예정 포함)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | | | | | | | | | | | R91 | | | | | |
| | FF01 | FF02 | FF03 | FF04 | FF05 | FF06 | FF07 | FF08 | FF09 | EE17 | EE19 | EE07 | DD56 | DD52 | DD49 | DD42 |
| B | | | | R77 | R79 | R76 | R84 | R75 | | R46 | | R44 | R65 | | | R56 |
| | FF10 | FF11 | FF12 | FF13 | FF14 | FF15 | FF16 | FF17 | FF18 | EE27 | EE06 | EE43 | EE40 | EE15 | EE05 | EE26 |
| C | | | | | | | R86 | R81 | R85 | R42 | EE52 | EE09 | DD19 | EE13 | EE01 | R58 |
| | | | | | | FF19 | FF20 | FF21 | FF22 | EE52 | EE09 | DD19 | EE13 | EE01 | EE24 | EE28 |
| D | | | | | | | | | | R87 | R67 | R97 | R60 | R70 | | R54 |
| | | | | | | FF23 | FF24 | FF25 | FF26 | EE35 | EE54 | EE55 | EE47 | EE14 | EE44 | EE38 |
| E | | | | | | | R83 | | R80 | | R55 | | R64 | | | |
| | | | | | | FF27 | FF28 | FF29 | FF30 | EE12 | EE42 | EE16 | EE33 | EE56 | EE45 | EE53 |
| F | | R82 | | | | | | | | R61 | | R51 | | R93 | R57 | |
| | FF31 | FF32 | FF33 | FF34 | FF35 | FF36 | FF37 | FF38 | FF39 | EE36 | EE03 | EE41 | EE11 | EE32 | EE39 | EE49 |
| G | | | | | | | | | | | R43 | | | R66 | | R47 |
| | FF40 | FF41 | FF42 | FF43 | FF44 | FF45 | FF46 | FF47 | FF48 | DD45 | EE23 | EE50 | EE51 | EE37 | EE08 | EE29 |
| H | | | | R88 | | | | | | R48 | | R53 | | | | R41 |
| | FF49 | FF50 | FF51 | FF52 | FF53 | FF54 | FF55 | FF56 | EE02 | EE31 | EE04 | EE34 | EE10 | DD50 | EE22 | EE25 |
| I | | | | | | | | | | | R49 | | R52 | | | R40 |
| | | | | | | | | | | DD54 | EE20 | EE18 | DD55 | EE21 | EE46 | EE30 |

- **사용후핵연료 저장조 내 제어봉 재배치(이동)**
 - 다음 주기에 사용 예정인 핵연료와 제어봉이 저장
 - 어떤 핵연료에 제어봉을 설치해야 하는지 사전에 결정
 - 제어봉을 기준으로 제어봉 설치에 필요한 핵연료로 이동시키는 작업

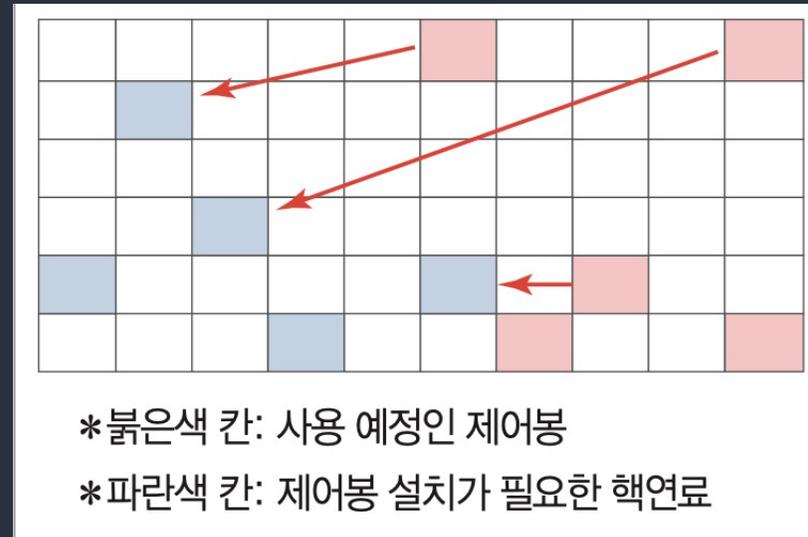


| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | | | | | | | | | | | R91 | | | | | | |
| | FF01 | FF02 | FF03 | FF04 | FF05 | FF06 | FF07 | FF08 | FF09 | EE17 | EE19 | EE07 | DD56 | DD49 | DD42 | | |
| B | | | | R77 | R79 | R76 | R84 | R75 | | R46 | | R44 | R65 | | | R56 | |
| | FF10 | FF11 | FF12 | FF13 | FF14 | FF15 | FF16 | FF17 | FF18 | EE27 | EE06 | EE43 | EE40 | EE15 | EE05 | EE26 | |
| C | | | | | | | R86 | R81 | R85 | R42 | | | | | R58 | | |
| | | | | | | FF19 | FF20 | FF21 | FF22 | EE52 | EE09 | DD19 | EE13 | EE01 | EE24 | EE28 | |
| D | | | | | | | | | R87 | R67 | R97 | R60 | R70 | | R54 | R98 | |
| | | | | | | FF23 | FF24 | FF25 | FF26 | EE35 | EE54 | EE55 | EE47 | EE14 | EE44 | EE38 | |
| E | | | | | | | R83 | | R80 | | R55 | | R64 | | | | |
| | | | | | | FF27 | FF28 | FF29 | FF30 | EE12 | EE42 | EE16 | EE33 | EE56 | EE45 | EE53 | |
| F | | R82 | | | | | | | | R61 | | R51 | | R93 | R57 | | |
| | FF31 | FF32 | FF33 | FF34 | FF35 | FF36 | FF37 | FF38 | FF39 | EE36 | EE03 | EE41 | EE11 | EE32 | EE39 | EE49 | |
| G | | | | | | | | | | | R43 | | | R66 | | R47 | |
| | FF40 | FF41 | FF42 | FF43 | FF44 | FF45 | FF46 | FF47 | FF48 | DD45 | EE23 | EE50 | EE51 | EE37 | EE08 | EE29 | |
| H | | | | R88 | | | | | | R48 | | R53 | | | | R41 | |
| | FF49 | FF50 | FF51 | FF52 | FF53 | FF54 | FF55 | FF56 | EE02 | EE31 | EE04 | EE34 | EE10 | DD50 | EE22 | EE25 | |
| I | | | | | | | | | | | R49 | | R52 | | | R40 | |
| | | | | | | | | | | DD54 | EE20 | EE18 | DD55 | EE21 | EE46 | EE48 | EE30 |

- **기중기 이동 경로 최적화**
 - 기존에는 작업자의 경험에 의존해 기중기의 이동 경로 결정
 - 작업자의 설정 경로가 최소인지 확인 불가능
 - 불필요한 작업 시간을 줄이고 정비 시간을 단축시켜 전기 생산의 효율성을 높이기 위해 기중기의 이동 거리를 최소화하고자 함

- 산업문제

- 예방정비 기간 단축을 위해서 불필요한 작업 시간과 비용 줄이기
- 기존에 경험적으로 결정했던 작업 프로세스 개선
- 사용후핵연료 저장조 내에서 제어봉을 핵연료로 옮길 때, 기중기가 움직이는 이동 거리를 최소화 하는 이동 경로를 찾고자 함

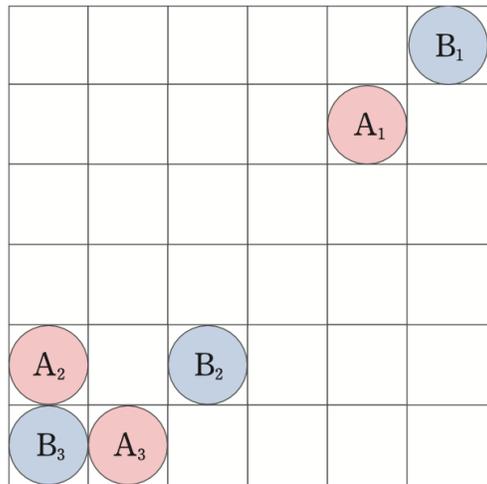


- 조건

1. 계획예방정비 기간에 사용 예정인 제어봉을 제어봉 설치가 필요한 핵연료로 이동시키고 설치
2. 사용후핵연료 저장조에는 사용 예정인 핵연료와 제어봉이 보관
3. 다음 주기에 사용 예정인 제어봉과 제어봉 설치가 필요한 핵연료의 개수는 동일하고 위치는 주어져 있음
4. 제어봉 설치가 필요한 핵연료에는 제어봉을 모두 설치해야 하고 한 개의 핵연료에는 한 개의 제어봉만 설치할 수 있음
5. 한 개의 기중기가 있고, 한 번에 하나의 제어봉만 옮길 수 있음
6. 기중기는 사전에 어느 곳이나 옮겨 놓을 수 있기 때문에 제어봉의 한 곳에서 시작한다고 가정해도 됨

• 탐색문제

- 기중기를 사용하여 3개의 제어봉을 3개의 핵연료로 옮기는 작업
- 핵연료에는 어떤 제어봉을 설치해도 상관없음
- 기중기가 제어봉을 핵연료로 모두 옮기고 다시 처음 위치로 돌아올 때, 기중기의 이동 거리가 최소가 되는 최적의 이동 경로는?

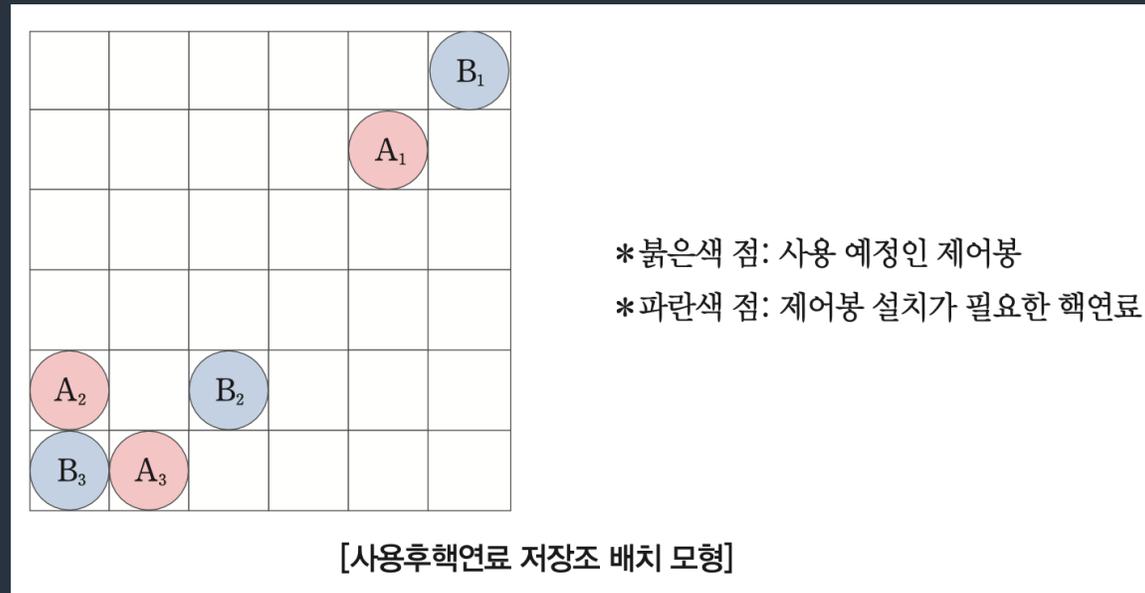


- *붉은색 점: 사용 예정인 제어봉
- *파란색 점: 제어봉 설치가 필요한 핵연료

[사용후핵연료 저장조 배치 모형]

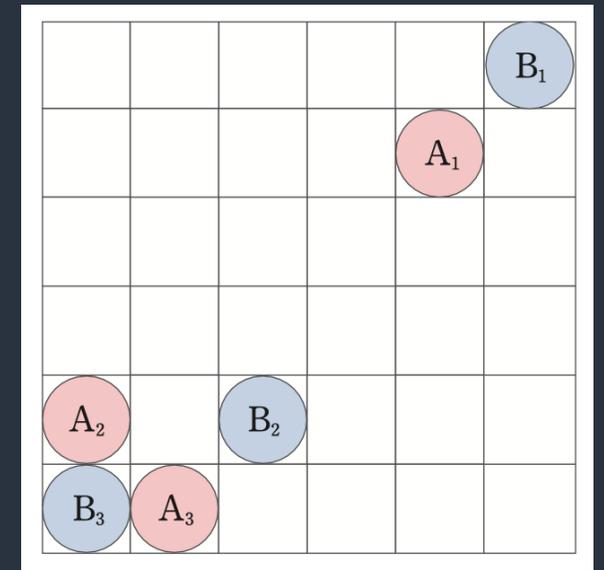
1. 기중기의 위치는 제어봉의 한 곳에서 시작(A_1)
2. 기중기는 한 번에 한 개의 제어봉만 이동
3. 핵연료에는 모두 제어봉을 설치해야 함
4. 기중기의 불필요한 이동은 없음
5. 기중기가 제어봉을 집어서 들어 올리고 내리는 이동 시간은 고려하지 않음

- 문제: 기중기가 A_1 에서 시작하여 제어봉을 모두 핵연료로 옮기고 다시 처음 위치인 A_1 으로 돌아오는 이동 경로를 모두 구하시오



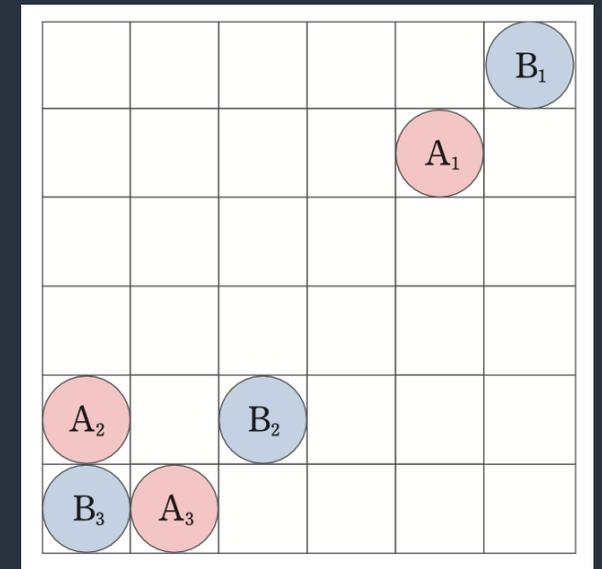
- 문제: 기중기가 A_1 에서 시작하여 제어봉을 모두 핵연료로 옮기고 다시 처음 위치인 A_1 으로 돌아오는 이동 경로를 모두 구하시오
- 정답

| 번호 | 이동 경로 | 번호 | 이동 경로 |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ① | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑦ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ② | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ | ⑧ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ③ | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑨ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ |
| ④ | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ | ⑩ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ⑤ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑪ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ |
| ⑥ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑫ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |



- 문제: 기중기의 이동 거리가 최소가 되는 최적의 이동 경로를 구하기 위해 어떤 정보가 필요할까요?

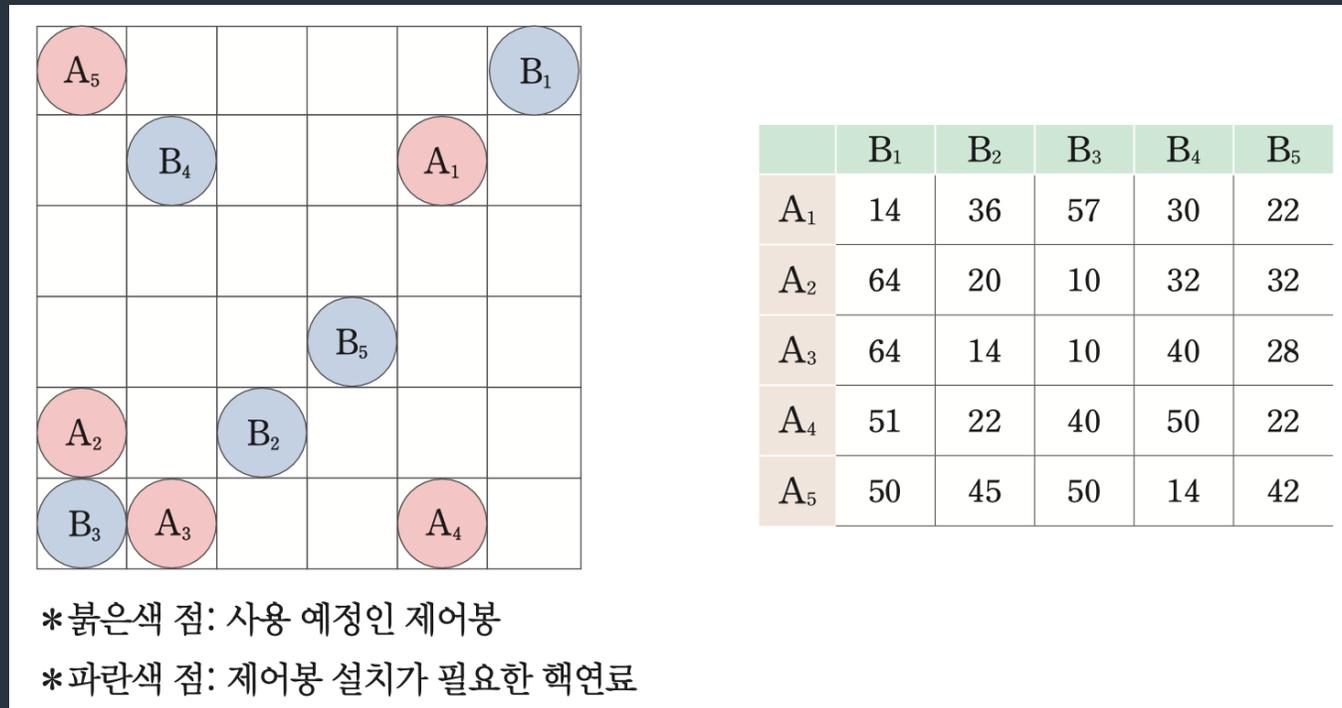
| 번호 | 이동 경로 | 번호 | 이동 경로 |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ① | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑦ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ② | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ | ⑧ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ③ | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑨ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ |
| ④ | $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ | ⑩ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |
| ⑤ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑪ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ |
| ⑥ | $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_3 \rightarrow A_1$ | ⑫ | $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1$ |



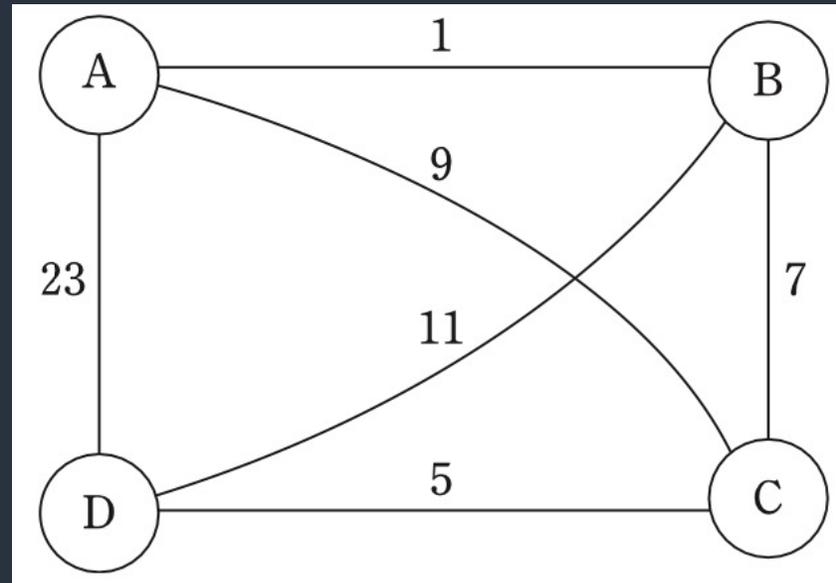
- 산업문제: 사용후핵연료 저장조에서 제어봉을 핵연료로 옮기는 기중기의 이동 거리가 최소가 되는 최적의 이동 경로 찾기

- 산업수학문제

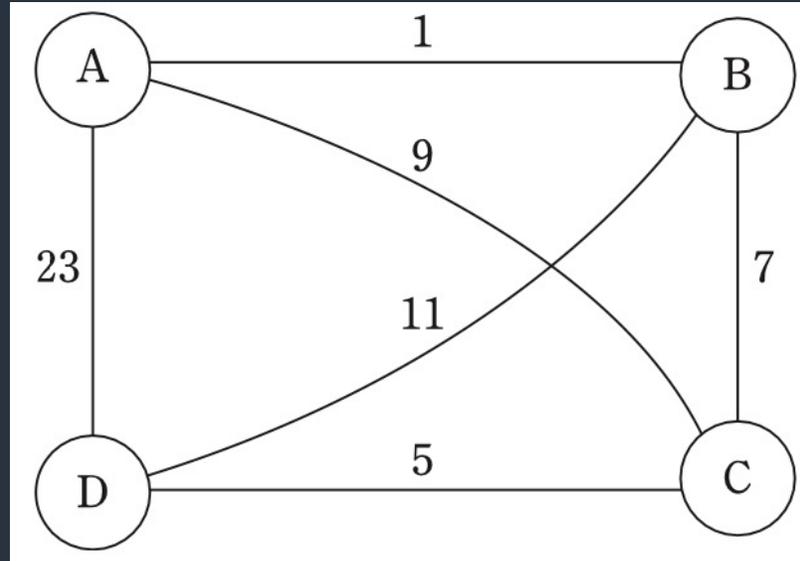
- 기중기로 5개의 제어봉을 5개의 핵연료로 옮기는 작업
- 핵연료에는 어떤 제어봉이 설치되어도 상관없고, 제어봉과 핵연료의 배치와 제어봉과 핵연료 사이의 이동 거리는 아래와 같음



- 외판원 문제(Travelling Salesman Problem, TSP)
 - 한 명의 외판원이 N 개의 도시를 한 번씩만 방문하고 시작 도시로 돌아온다고 하자. 모든 도시 간 이동 거리가 주어져 있을 때, 이동 거리가 최소가 되는 외판원의 이동 경로를 구하시오
 - 조건: 모든 도시는 연결되어 있고 가는 거리와 오는 거리는 동일

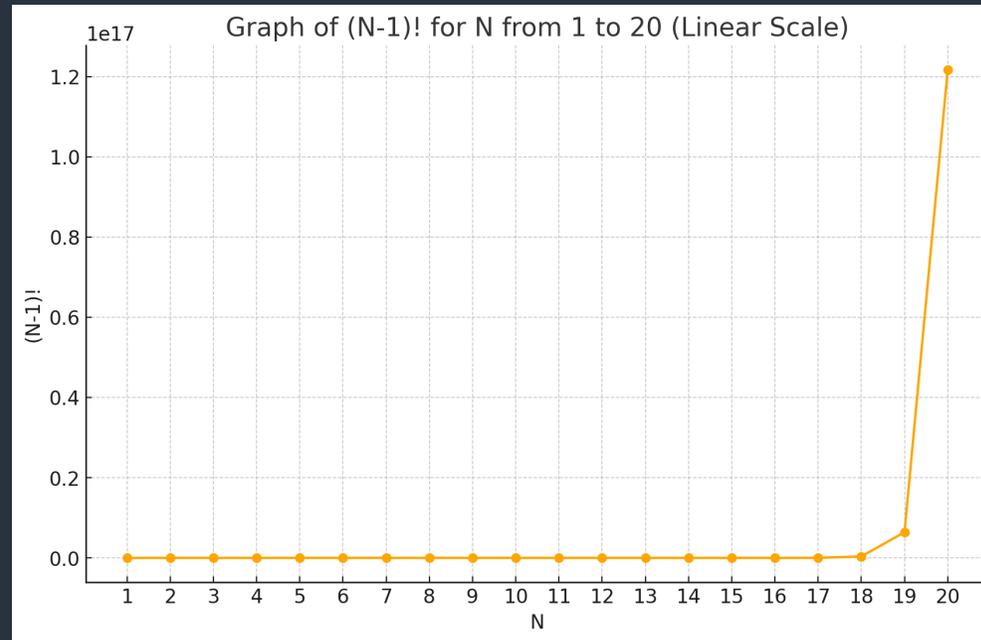


- 외판원 문제(Travelling Salesman Problem, TSP)

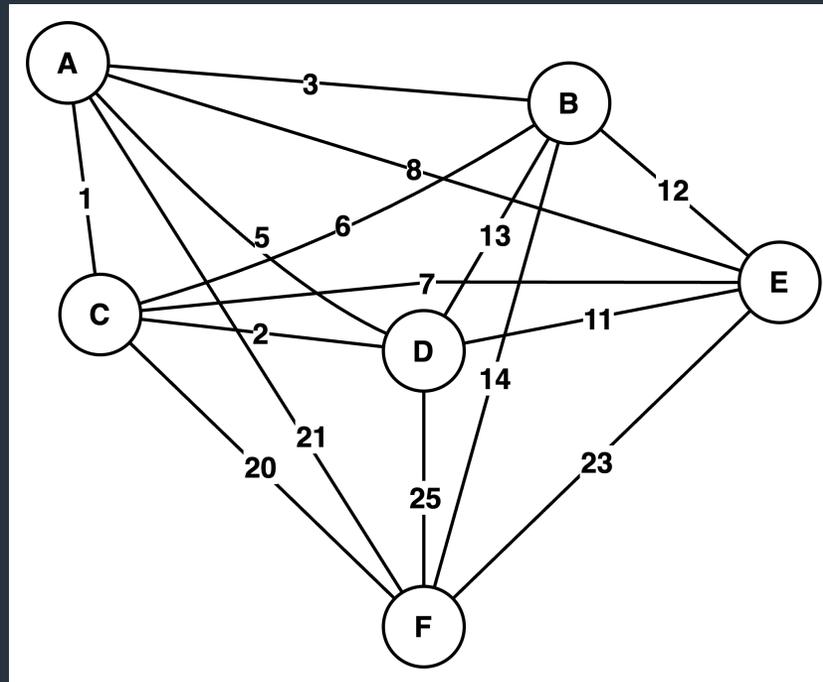


- A에서 출발하여 모든 도시를 방문하고 다시 A로 돌아오는 모든 경로는?
- 위 경로 중 이동 거리가 최소인 경로는?

- 외판원 문제의 출발 도시가 정해져 있을 때 이동 경로 경우의 수
 $(N - 1)(N - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$
- 도시의 수 N 이 증가할 때 이동 경로 경우의 수는 기하급수적으로 증가

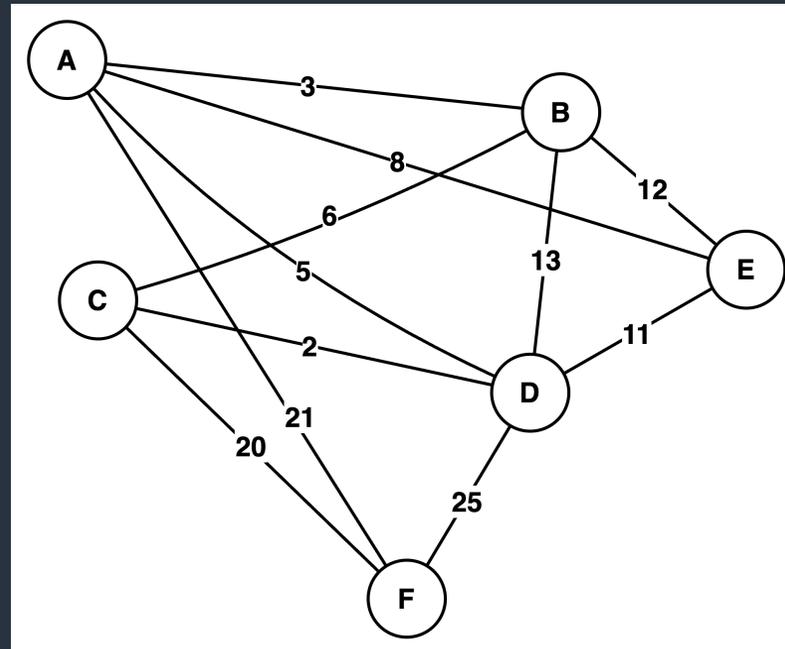


- 외판원의 모든 이동 경로를 탐색하는 것은 **현실적으로 불가능**
- 모든 경로를 다 조사하지 않고 외판원 문제를 해결할 수 있는 방법은?

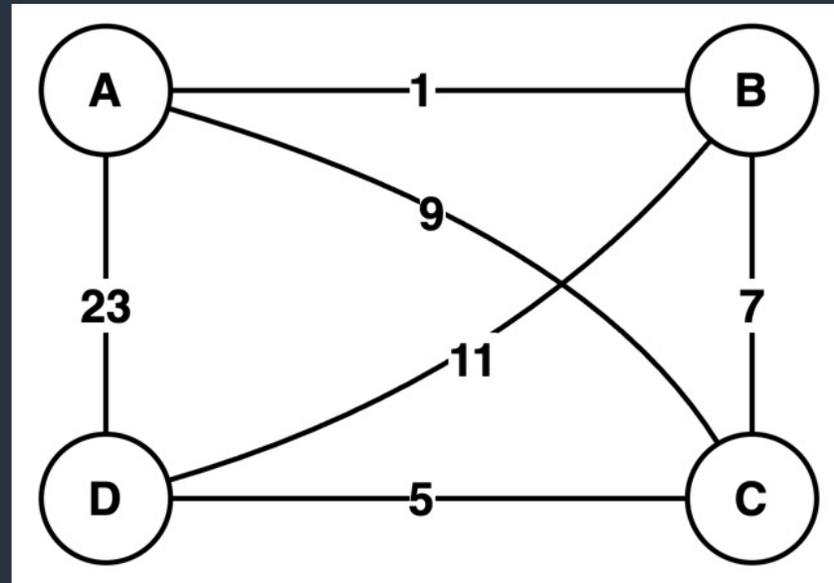


- 외판원의 최적의 경로 탐색 방법
- 정확한 알고리즘(exact algorithm)
 - 완전 탐색(brute force)
 - 동적 계획법(dynamic programming)
- 근사 알고리즘(approximation algorithm)
 - 최근접 이웃 알고리즘(nearest neighbor algorithm)
 - 이동 경로 단순화

- 참고: 비대칭 외판원 문제(asymmetric TSP)
 - 특정 도시간의 이동 경로가 없거나 이동 거리가 대칭이 아닌 외판원 문제
 - 비대칭성으로 일반적으로 외판원 문제보다 해결 방법이 복잡함

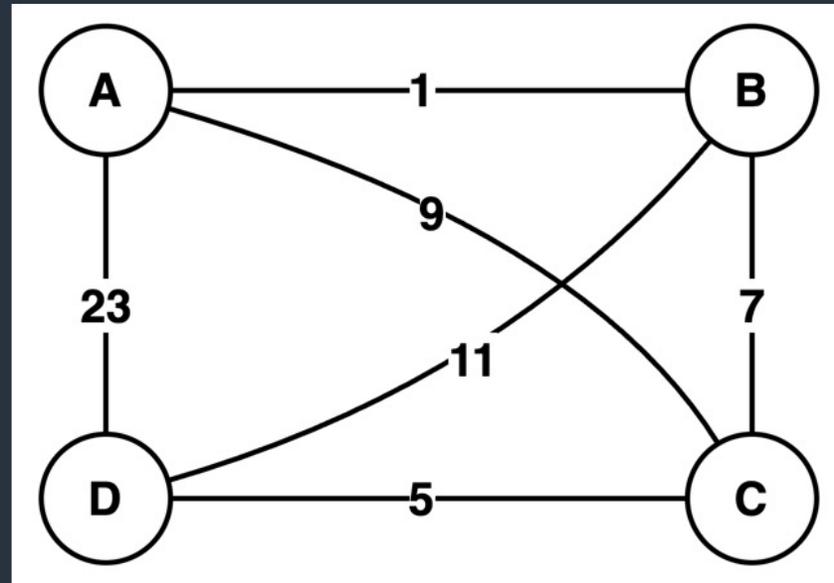


- 정수 선형계획법을 활용한 외판원 문제 해결
 - 도시가 4개(A, B, C, D 순서)
 - c_{ij} : i 도시와 j 도시 간의 이동 거리($c_{ij} = c_{ji}$)
 - $c_{12} = 1, c_{13} = 9, c_{14} = 23$
 - $c_{23} = 7, c_{24} = 11, c_{34} = 5$

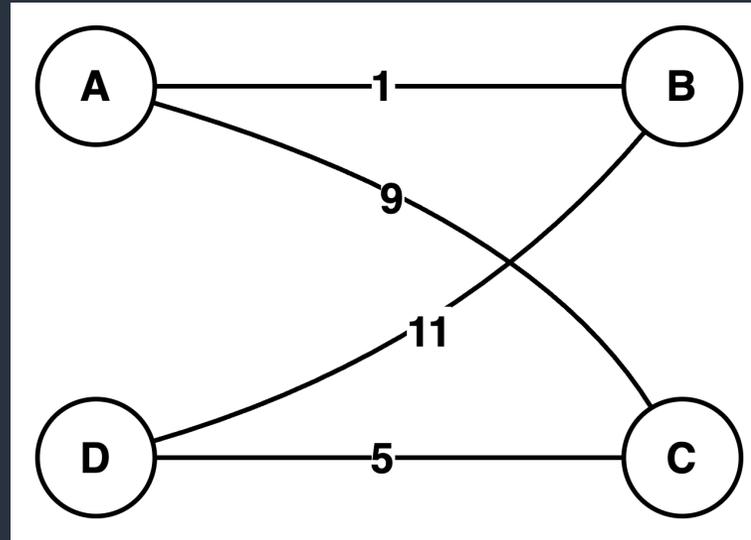


- 정수 선형계획법을 활용한 외판원 문제 해결
 - 외판원의 이동 경로를 설명하는 결정 변수는 아래와 같이 정의
 - $1 \leq i, j \leq 4$ 이면서 $i \neq j$ 에 대해서

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i\text{도시에서 } j\text{도시로 이동 하는 경로가 있는 경우} \\ 0 & i\text{도시에서 } j\text{도시로 이동 하는 경로가 없는 경우} \end{cases}$$



- 정수 선형계획법을 활용한 외판원 문제 해결
 - 결정 변수 x_{ij} 는 0 또는 1의 값을 가짐



- 예시: 위 그림과 같이 외판원이 이동한 경우
 - $x_{12} = x_{24} = x_{43} = x_{31} = 1, x_{21} = x_{42} = x_{34} = x_{13} = 1$
 - 나머지 $x_{ij} = 0$

- 정수 선형계획법을 활용한 외판원 문제 해결
 - 목적함수: 외판원 이동 경로의 이동 거리(최소화)

$$c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \cdots + c_{34}x_{34}$$

- 정수 선형계획법을 활용한 외판원 문제 해결

- 제약 조건

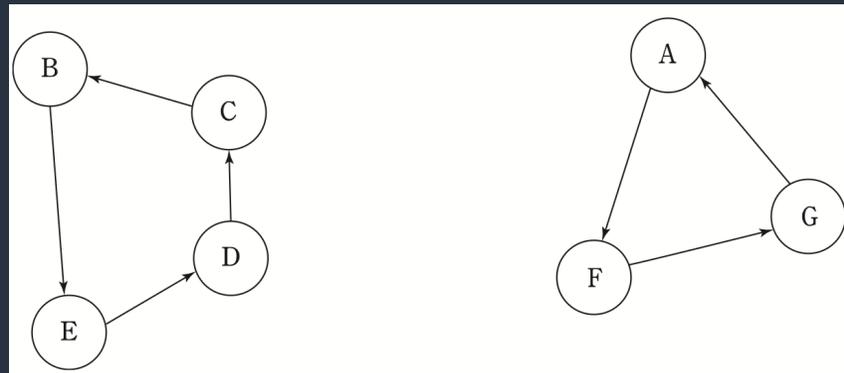
- 모든 도시를 한 번씩만 방문

- 모든 도시는 들어가는 경로와 나가는 경로가 한 개씩만 존재

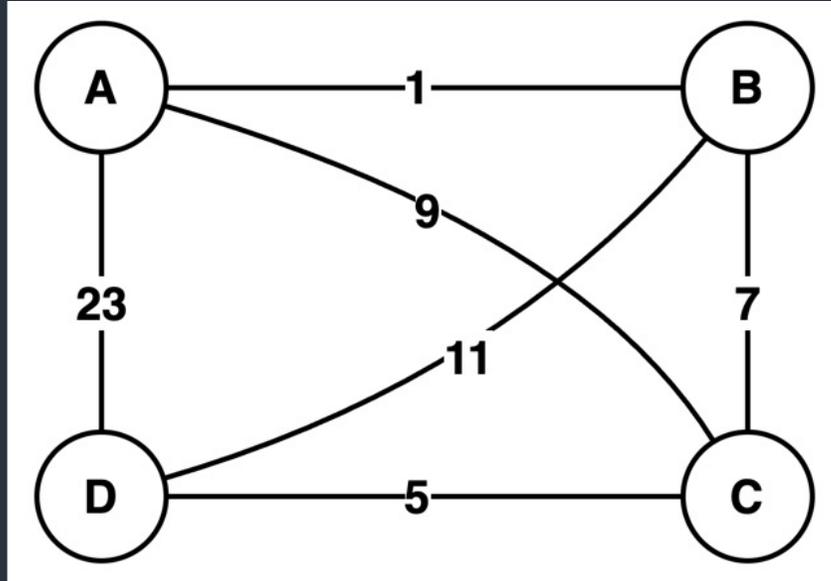
$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1, x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1, x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1, x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1, x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

- 외판원의 이동 경로가 끊어지면 안됨(여기서는 생략)



- 컴퓨터 계산 도구를 활용한 외판원 문제 해결

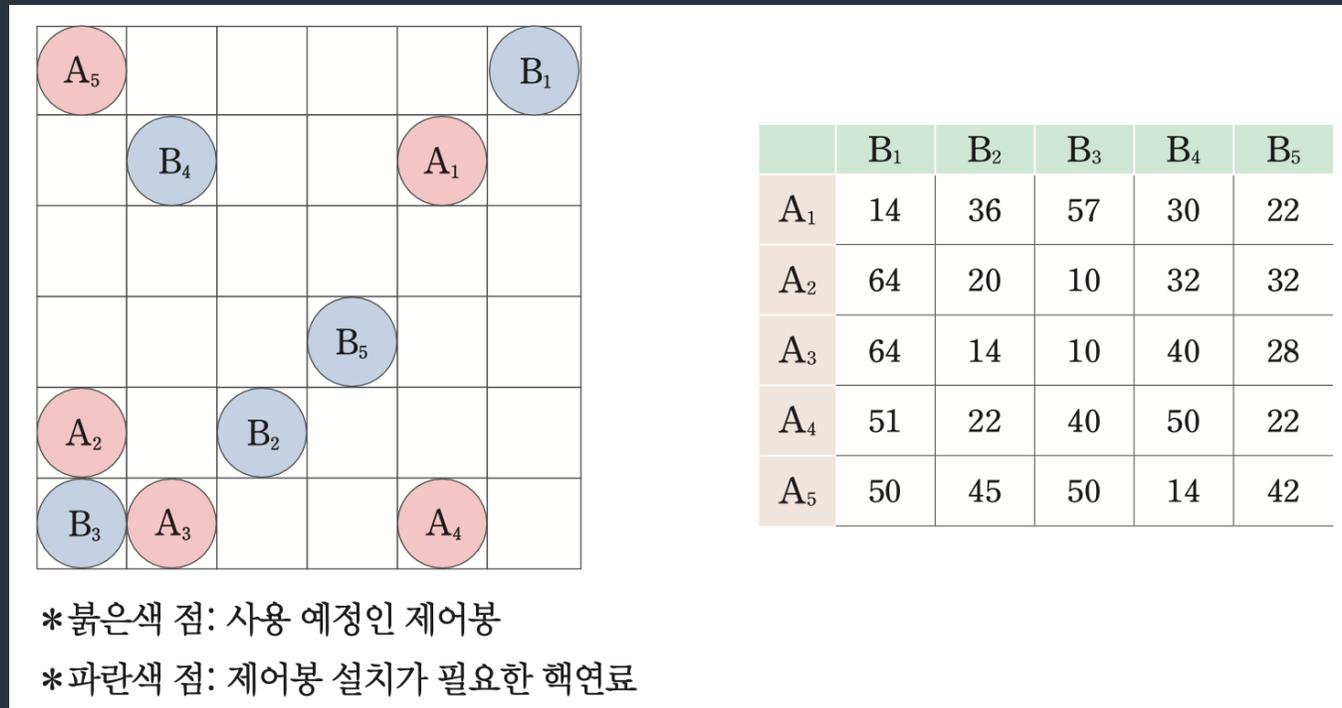


| | A | B | C | D |
|---|----|----|---|----|
| A | 0 | 1 | 9 | 23 |
| B | 1 | 0 | 7 | 11 |
| C | 9 | 7 | 0 | 5 |
| D | 23 | 11 | 5 | 0 |

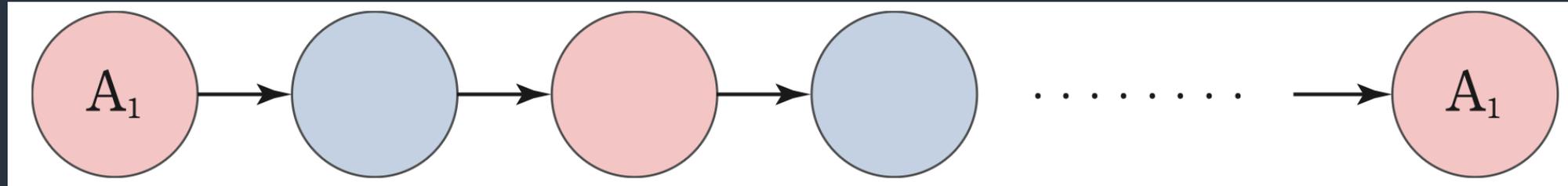
- Google Or-tools
 - 예시
 - <https://shorturl.at/8tpL4>

- 산업수학문제

- 기중기로 5개의 제어봉을 5개의 핵연료로 옮기는 작업
- 핵연료에는 어떤 제어봉이 설치되어도 상관없고, 제어봉과 핵연료의 배치와 제어봉과 핵연료 사이의 이동 거리는 아래와 같음



- 산업수학문제와 외판원 문제의 차이점
 - 기중기는 제어봉에서 출발하여 핵연료로 이동해야 함
 - 그 다음 핵연료에서는 제어봉으로 이동해야 함
 - 제어봉에서 제어봉으로의 이동과 핵연료에서 핵연료로의 이동은 고려하지 않음(기중기의 불필요한 이동이 없기 때문)



- 외판원 문제를 컴퓨터 계산 도구를 이용해서 해결하기 위해서 도시 간 **이동 거리 정보**가 필요
- 기중기가 이동할 수 없는 경로를 나타내기 위해 어떻게 할까요?

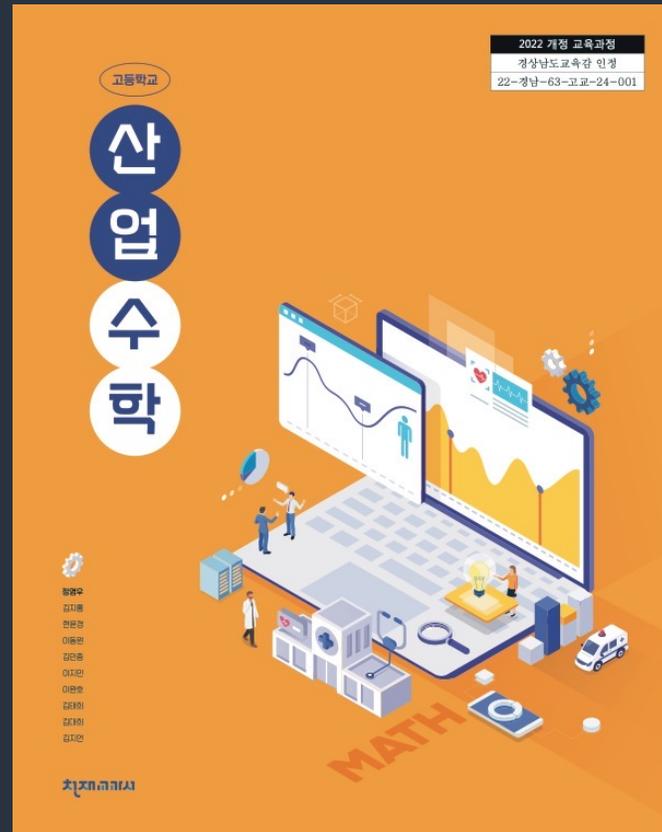
- 외판원 문제를 컴퓨터 계산 도구를 이용해서 해결하기 위해서 도시 간 이동 거리 정보가 필요
- 기중기가 이동할 수 없는 경로를 나타내기 위해 어떻게 할까요?
- 컴퓨터 계산 도구를 활용한 산업수학 문제 해결
 - <https://shorturl.at/8iaAG>

| | B ₁ | B ₂ | B ₃ | B ₄ | B ₅ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A ₁ | 14 | 36 | 57 | 30 | 22 |
| A ₂ | 64 | 20 | 10 | 32 | 32 |
| A ₃ | 64 | 14 | 10 | 40 | 28 |
| A ₄ | 51 | 22 | 40 | 50 | 22 |
| A ₅ | 50 | 45 | 50 | 14 | 42 |

| | | | | | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A ₁ | 0 | M | M | M | M | 14 | 36 | 57 | 30 | 22 |
| A ₂ | M | 0 | M | M | M | 64 | 20 | 10 | 32 | 32 |
| A ₃ | M | M | 0 | M | M | 64 | 14 | 10 | 40 | 28 |
| A ₄ | M | M | M | 0 | M | 51 | 22 | 40 | 50 | 22 |
| A ₅ | M | M | M | M | 0 | 50 | 45 | 50 | 14 | 42 |
| B ₁ | 14 | 64 | 64 | 51 | 50 | 0 | M | M | M | M |
| B ₂ | 36 | 20 | 14 | 22 | 45 | M | 0 | M | M | M |
| B ₃ | 57 | 10 | 10 | 40 | 50 | M | M | 0 | M | M |
| B ₄ | 30 | 32 | 40 | 50 | 14 | M | M | M | 0 | M |
| B ₅ | 22 | 32 | 28 | 22 | 42 | M | M | M | M | 0 |

- **산업문제 일반화**
 - 기중기의 이동 방식에 따른 이동 거리 또는 이동 시간 정의
 - 기중기의 시작 위치와 도착 위치를 다르게 설정
 - 제어봉과 핵연료의 사용 횟수 및 원자로 내 위치 등을 고려한 제약 조건 반영

- 산업수학(2022 개정 교육과정)
 - 천재교과서 2025년



감사합니다